КИЇВСЬКИЙ СТОЛИЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ БОРИСА ГРІНЧЕНКА
Факультет інформаційних технологій та математики
Кафедра математики і фізики

Затверджено на засіданні кафедри
математики і фізики
(протокол № 8 від 14.10.2026)

РОБОЧА ПРОГРАМА ІСПИТУ

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ТА ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Галузь знань 11 Математика та статистика
спеціальність 111 Математика
освітня програма 111.00.01 Математика

2026-2027 навчальний рік

Опис програми іспиту

Київський столичний університет імені Бориса Грінченка
Кафедра математики і фізики
Програма іспиту з дисципліни «Функціональний аналіз та варіаційне числення»
1 курс – освітній рівень – перший (бакалаврський)
Спеціальність 111 Математика
Освітня програма: 111.00.01 Математика
Форма проведення: Форма проведення: письмово
Тривалість проведення **1 год. 20 хв.**
Максимальна кількість балів: **40 балів**

Екзамен проводиться в університетській аудиторії у письмовій формі, якщо ситуація дозволяє проведення освітнього процесу офлайн. Якщо ж освітній процес проходить дистанційно, то екзамен проводиться онлайн в режимі відеоконференції засобами Google Meet.

Екзамен проводиться із суворим дотриманням принципів академічної доброчесності, що передбачає самостійне виконання завдань, недопустимість списування, фальсифікацій та обману.

При порушенні принципів академічної доброчесності студент відсторонюється від подальшого проходження екзаменаційного тесту із підсумковою оцінкою *Fx* за дисципліну.

Підсумкова оцінка в балах (максимально 100 балів) за дисципліну є сумою результату поточного контролю за семестр (60 балів) та відповіді на екзамені (40 балів).

Екзаменаційний білет містить одне теоретичне питання та три практичні завдання, кожне з яких оцінюється максимально у 10 балів.

Критерії оцінювання завдань:

10 балів: Відмінний рівень знань (умінь), відповідь повна, вичерпна й достатньо обґрунтована (без недоліків), продемонстровано розуміння матеріалу та вміння застосовувати теоретичні положення для розв’язання практичних завдань, теоретичні положення продемонстровані на прикладах.

8-9 балів: Високий рівень знань (умінь), відповідь достатньо повна й обґрунтована, практично без недоліків і помилок, але не всі теоретичні положення проілюстровані на прикладах чи при виконанні практичних завдань не наведено посилання на відповідні теоретичні положення;

6-7 балів: Середній рівень знань (умінь), відповідь не повна, містить деякі недоліки та / або незначну кількість помилок.

4-5 балів: Мінімально допустимий рівень знань (умінь), що характеризується недостатньою обґрунтованістю, нездатністю

проілюструвати теоретичні положення на прикладах, фрагментарністю; відповідь неповна, містить недоліки та помилки.

3 бали: Незадовільний рівень знань, що виявляється у формальному запам'ятанні деяких понять і фактів, без належного їх розуміння, нездатністю застосувати теоретичні знання при розв'язанні задач.

1-2 бал: Незадовільний рівень знань (умінь), що виявляється у неспроможності відтворити означення понять та формулювання теорем, невмінні розв'язувати задачі.

0 балів: Відповідь відсутня.

Перелік тем, питань, які виносяться на іспит:

1. Записати першу нерівність Коші. Пояснити нерівність на прикладі.
2. Записати нерівність Буняковського. Пояснити нерівність на прикладі.
3. Сформулювати означення метрики і поняття метричного простору. Дати приклади. Пояснити поняття еквівалентних метрик.
4. Сформулювати означення збіжної послідовності елементів метричного простору, означення фундаментальної послідовності і означення повного метричного простору. Навести приклади.
5. Сформулювати означення норми і означення нормованого простору. Навести приклади.
6. Сформулювати означення збіжної за нормою послідовності елементів нормованого простору, означення фундаментальної послідовності. Навести приклади.
7. Сформулювати означення банахового простору і дати приклади банахових просторів.
8. Сформулювати означення гільбертового простору і дати приклади гільбертових просторів.
9. Сформулювати означення функціоналу, зокрема, лінійного і неперервного функціоналу. Дати приклади лінійних і неперервних функціоналів.
10. Сформулювати означення першої та другої варіації функціоналів.
11. Розкрити поняття сильного та слабкого екстремумів.
12. Необхідна та достатня умови існування екстремумів функціоналів.
13. Поняття екстремалі. Рівняння Ейлера для визначення екстремалей.
14. Задачі варіаційного числення для функціоналів, що містять старші похідні. Рівняння Ейлера-Пуассона.
15. Задача Лагранжа та задача Больца на множині функцій із рухомими межами. Умови існування локальних екстремумів.
16. Достатні умови існування слабкого екстремуму для задачі Лагранжа.
17. Достатні умови існування сильного екстремуму, функція Вейєрштрасса

Приклад екзаменаційного білету:

Завдання 1. Сформулювати означення збіжної за нормою послідовності елементів з нормованого простору та означення фундаментальної послідовності. Навести приклади.

Завдання 2. Обчислити функціонал при заданому значенні аргументу:

$$F[y] = \int_1^e x\,y(y'')^2\,dx; \quad y = \ln x$$

.

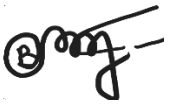
Завдання 3. Знайти екстремалі функціоналу, які задовольняють заданим крайовим умовам (допустимі екстремалі):

$$F[y] = \int_0^1 e^y(1 + x\,y')\,dx; \qquad y(0) = 0; \;\; y(1) = 0.$$

Завдання 4. Знайти допустимі екстремалі задачі Лагранжа:

$$F[y,z] = \int_0^1 \left((y')^2 + z\right)dx; \qquad y(0) = 1; \;\; z(0) = 1; \; y(1) = e; \; z(1) = e^2 + 1;$$

$$z - y^2 - x = 0.$$

Екзаменатор  Вікторія СОЛОМКО

Завідувач кафедри  Світлана СЕМЕНЯКА